Una Reformulación de la Mecánica Clásica

Agustín A. Tobla

(2024) Buenos Aires, Argentina

(Trabajo III)

En mecánica clásica, una nueva reformulación es presentada, que es invariante bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales y que puede ser aplicada en cualquier sistema de referencia sin necesidad de introducir las fuerzas ficticias. Adicionalmente, en este trabajo, todas las fuerzas pueden obedecer o desobedecer la tercera ley de Newton.

Introducción

La nueva reformulación, que este trabajo presenta en mecánica clásica, se desarrolla a partir de un sistema auxiliar de partículas (denominado free-system) que es utilizado para obtener magnitudes cinemáticas (denominadas inerciales) que son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales.

La posición inercial $\mathbf{r}_i$, la velocidad inercial $\mathbf{v}_i$ y la aceleración inercial $\mathbf{a}_i$ de una partícula i con respecto a un sistema de referencia S (inercial o no inercial) están dadas por:

$$\mathbf{r}_i \doteq (\tilde{r}_i) = (\vec{r}_i - \vec{R})$$

$$\mathbf{v}_i \doteq d(\tilde{r}_i)/dt = (\vec{v}_i - \vec{V}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})$$

$$\mathbf{a}_i \doteq d^2(\tilde{r}_i)/dt^2 = (\vec{a}_i - \vec{A}) - 2\,\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}) + \vec{\omega} \times [\,\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})\,] - \vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R})$$

donde $\tilde{r}_i$ es el vector de posición de la partícula i con respecto al sistema auxiliar [$\vec{r}_i$ es el vector de posición de la partícula i, $\vec{R}$ es el vector de posición del centro de masa del free-system y $\vec{\omega}$ es el vector de velocidad angular del free-system] [con respecto al sistema S] (ver Anexo I)

El sistema auxiliar es un sistema de referencia fijo al free-system ($\vec{\omega} = 0$) cuyo origen coincide siempre con el centro de masa del free-system ($\vec{R} = \vec{V} = \vec{A} = 0$)

Cualquier sistema de referencia S es inercial cuando la velocidad angular $\vec{\omega}$ del free-system y la aceleración $\vec{A}$ del centro de masa del free-system son iguales a cero con respecto a S.

Nota : ($\forall$ $\mathbf{m} \in$ Magnitudes Inerciales : Si $\mathbf{m} = \vec{n} \longrightarrow d(\mathbf{m})/dt = d(\vec{n})/dt - \vec{\omega} \times \vec{n}$)

Nueva Dinámica

[1] Toda fuerza siempre es causada por la interacción entre dos o más partículas.

[2] La fuerza neta $\mathbf{F}_i$ que actúa sobre una partícula i de masa m_i produce una aceleración inercial $\mathbf{a}_i$ según la siguiente ecuación: [$\mathbf{F}_i = m_i\,\mathbf{a}_i$]

[3] En este trabajo, todas las fuerzas pueden obedecer o desobedecer la tercera ley de Newton en su forma débil y/o en su forma fuerte.

Ecuación de Movimiento

La fuerza neta $\mathbf{F}_i$ que actúa sobre una partícula i de masa m_i produce una aceleración inercial $\mathbf{a}_i$ según la siguiente ecuación:

$$\mathbf{F}_i = m_i \, \mathbf{a}_i$$

A partir de la ecuación anterior se deduce que la aceleración (ordinaria) $\vec{a}_i$ de la partícula i con respecto a un sistema de referencia S (inercial o no inercial) está dada por:

$$\vec{a}_i = \mathbf{F}_i/m_i + \vec{A} + 2\,\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}) - \vec{\omega} \times [\,\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})\,] + \vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R})$$

donde $\vec{r}_i$ es el vector de posición de la partícula i, $\vec{R}$ es el vector de posición del centro de masa del free-system y $\vec{\omega}$ es el vector de velocidad angular del free-system (ver Anexo I)

Desde la ecuación anterior se deduce que la partícula i puede estar acelerada incluso si sobre la partícula i no actúa fuerza alguna y también que la partícula i puede no estar acelerada (estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme) incluso si sobre la partícula i actúa una fuerza neta no equilibrada.

Sin embargo, desde la ecuación anterior también se deduce que la primera y segunda ley de Newton son válidas en cualquier sistema de referencia inercial, puesto que la velocidad angular $\vec{\omega}$ del free-system y la aceleración $\vec{A}$ del centro de masa del free-system son iguales a cero con respecto a cualquier sistema de referencia inercial.

En este trabajo, cualquier sistema de referencia S es un sistema de referencia inercial cuando la velocidad angular $\vec{\omega}$ del free-system y la aceleración $\vec{A}$ del centro de masa del free-system son iguales a cero con respecto a S. Por lo tanto, cualquier sistema de referencia S es un sistema de referencia no inercial cuando la velocidad angular $\vec{\omega}$ del free-system y/o la aceleración $\vec{A}$ del centro de masa del free-system no son iguales a cero con respecto a S.

Sin embargo, puesto que en mecánica clásica cualquier sistema de referencia es realmente un cuerpo rígido ideal entonces cualquier sistema de referencia S es un sistema inercial cuando la fuerza neta que actúa en cada punto del sistema S es igual a cero. Por lo tanto, cualquier sistema de referencia S es un sistema no inercial cuando la fuerza neta que actúa en cada punto del sistema S no es igual a cero (ver Anexo IV)

Por otro lado, la nueva reformulación de la mecánica clásica presentada en este trabajo y la mecánica newtoniana son observacionalmente equivalentes.

Sin embargo, los observadores no inerciales pueden utilizar la mecánica newtoniana sólo si introducen fuerzas ficticias en $\mathbf{F}_i$ (como la fuerza centrífuga, la fuerza de Coriolis, etc.)

Adicionalmente, la nueva reformulación de la mecánica clásica presentada en este trabajo es también una reformulación relacional de la mecánica clásica puesto que está desarrollada a partir de magnitudes relativas (posición, velocidad y aceleración) entre partículas.

Sin embargo, como se ha dicho más arriba, la nueva reformulación de la mecánica clásica presentada en este trabajo y la mecánica newtoniana son observacionalmente equivalentes.

Definiciones

Para un sistema de N partículas, las siguientes definiciones son aplicables:

Masa	$\mathrm{M} \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} m_i$
Posición CM 1	$\vec{R}_{cm} \doteq \mathrm{M}^{-1} \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, \vec{r}_i$
Velocidad CM 1	$\vec{V}_{cm} \doteq \mathrm{M}^{-1} \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, \vec{v}_i$
Aceleración CM 1	$\vec{A}_{cm} \doteq \mathrm{M}^{-1} \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, \vec{a}_i$
Posición CM 2	$\mathbf{R}_{cm} \doteq \mathrm{M}^{-1} \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, \mathbf{r}_i$
Velocidad CM 2	$\mathbf{V}_{cm} \doteq \mathrm{M}^{-1} \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, \mathbf{v}_i$
Aceleración CM 2	$\mathbf{A}_{cm} \doteq \mathrm{M}^{-1} \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, \mathbf{a}_i$
Momento Lineal 1	$\mathbf{P}_1 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, \mathbf{v}_i$
Momento Angular 1	$\mathbf{L}_1 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \left[\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i \right]$
Momento Angular 2	$\mathbf{L}_2 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \left[(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm}) \right]$
Trabajo 1	$\mathrm{W}_1 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \Delta \, \mathrm{K}_1$
Energía Cinética 1	$\Delta \, \mathrm{K}_1 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} \Delta \, {}^1\!/_2 \, m_i \, (\mathbf{v}_i)^2$
Energía Potencial 1	$\Delta \, \mathrm{U}_1 \doteq - \sum_i^{\mathrm{N}} \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i$
Energía Mecánica 1	$\mathrm{E}_1 \doteq \mathrm{K}_1 + \mathrm{U}_1$
Lagrangiano 1	$\mathrm{L}_1 \doteq \mathrm{K}_1 - \mathrm{U}_1$
Trabajo 2	$\mathrm{W}_2 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) = \Delta \, \mathrm{K}_2$
Energía Cinética 2	$\Delta \, \mathrm{K}_2 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} \Delta \, {}^1\!/_2 \, m_i \, (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm})^2$
Energía Potencial 2	$\Delta \, \mathrm{U}_2 \doteq - \sum_i^{\mathrm{N}} \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})$
Energía Mecánica 2	$\mathrm{E}_2 \doteq \mathrm{K}_2 + \mathrm{U}_2$
Lagrangiano 2	$\mathrm{L}_2 \doteq \mathrm{K}_2 - \mathrm{U}_2$

Trabajo 3 $\mathrm{W}_3 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} \Delta\, {}^1\!/_2\, \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = \Delta\, \mathrm{K}_3$

Energía Cinética 3 $\Delta\, \mathrm{K}_3 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} \Delta\, {}^1\!/_2\, m_i\, \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r}_i$

Energía Potencial 3 $\Delta\, \mathrm{U}_3 \doteq -\sum_i^{\mathrm{N}} \Delta\, {}^1\!/_2\, \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i$

Energía Mecánica 3 $\mathrm{E}_3 \doteq \mathrm{K}_3 + \mathrm{U}_3$

Trabajo 4 $\mathrm{W}_4 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} \Delta\, {}^1\!/_2\, \mathbf{F}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) = \Delta\, \mathrm{K}_4$

Energía Cinética 4 $\Delta\, \mathrm{K}_4 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} \Delta\, {}^1\!/_2\, m_i \left[(\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_{cm}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \right]$

Energía Potencial 4 $\Delta\, \mathrm{U}_4 \doteq -\sum_i^{\mathrm{N}} \Delta\, {}^1\!/_2\, \mathbf{F}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})$

Energía Mecánica 4 $\mathrm{E}_4 \doteq \mathrm{K}_4 + \mathrm{U}_4$

Trabajo 5 $\mathrm{W}_5 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} \left[\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\vec{r}_i - \vec{R}) + \Delta\, {}^1\!/_2\, \mathbf{F}_i \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}) \right] = \Delta\, \mathrm{K}_5$

Energía Cinética 5 $\Delta\, \mathrm{K}_5 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} \Delta\, {}^1\!/_2\, m_i \left[(\vec{v}_i - \vec{V})^2 + (\vec{a}_i - \vec{A}) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}) \right]$

Energía Potencial 5 $\Delta\, \mathrm{U}_5 \doteq -\sum_i^{\mathrm{N}} \left[\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\vec{r}_i - \vec{R}) + \Delta\, {}^1\!/_2\, \mathbf{F}_i \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}) \right]$

Energía Mecánica 5 $\mathrm{E}_5 \doteq \mathrm{K}_5 + \mathrm{U}_5$

Trabajo 6 $\mathrm{W}_6 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} \left[\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) + \Delta\, {}^1\!/_2\, \mathbf{F}_i \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \right] = \Delta\, \mathrm{K}_6$

Energía Cinética 6 $\Delta\, \mathrm{K}_6 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} \Delta\, {}^1\!/_2\, m_i \left[(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})^2 + (\vec{a}_i - \vec{A}_{cm}) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \right]$

Energía Potencial 6 $\Delta\, \mathrm{U}_6 \doteq -\sum_i^{\mathrm{N}} \left[\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) + \Delta\, {}^1\!/_2\, \mathbf{F}_i \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \right]$

Energía Mecánica 6 $\mathrm{E}_6 \doteq \mathrm{K}_6 + \mathrm{U}_6$

Relaciones

En un sistema de partículas, entre las energías cinéticas, las energías potenciales y las energías mecánicas, se dan siempre estas relaciones (ver Anexo II)

$$\mathrm{K}_1 = \mathrm{K}_2 + {}^1\!/_2\, \mathrm{M}\, \mathbf{V}_{cm}^2$$

$$\mathrm{K}_3 = \mathrm{K}_4 + {}^1\!/_2\, \mathrm{M}\, \mathbf{A}_{cm} \cdot \mathbf{R}_{cm}$$

$$\mathrm{K}_5 = \mathrm{K}_6 + {}^1\!/_2\, \mathrm{M} \left[(\vec{V}_{cm} - \vec{V})^2 + (\vec{A}_{cm} - \vec{A}) \cdot (\vec{R}_{cm} - \vec{R}) \right]$$

$$\mathrm{K}_5 = \mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_3 \quad \& \quad \mathrm{U}_5 = \mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_3 \quad \& \quad \mathrm{E}_5 = \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_3$$

$$\mathrm{K}_6 = \mathrm{K}_2 + \mathrm{K}_4 \quad \& \quad \mathrm{U}_6 = \mathrm{U}_2 + \mathrm{U}_4 \quad \& \quad \mathrm{E}_6 = \mathrm{E}_2 + \mathrm{E}_4$$

Leyes de Conservación

El momento lineal [$\mathbf{P}_1$] de un sistema aislado de N partículas permanece constante si las fuerzas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma débil.

$$\mathbf{P}_1 \;=\; \text{constante} \qquad \left[\, d(\mathbf{P}_1)/dt \;=\; \textstyle\sum_i^{\rm N} m_i\, \mathbf{a}_i \;=\; \sum_i^{\rm N} \mathbf{F}_i \;=\; 0 \,\right]$$

El momento angular [$\mathbf{L}_1$] de un sistema aislado de N partículas permanece constante si las fuerzas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma fuerte.

$$\mathbf{L}_1 \;=\; \text{constante} \qquad \left[\, d(\mathbf{L}_1)/dt \;=\; \textstyle\sum_i^{\rm N} m_i \left[\, \mathbf{r}_i \times \mathbf{a}_i \,\right] \;=\; \sum_i^{\rm N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \;=\; 0 \,\right]$$

El momento angular [$\mathbf{L}_2$] de un sistema aislado de N partículas permanece constante si las fuerzas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma fuerte.

$$\mathbf{L}_2 \;=\; \text{constante} \qquad \left[\, d(\mathbf{L}_2)/dt \;=\; \textstyle\sum_i^{\rm N} m_i \left[\, (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \times (\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_{cm}) \,\right] \;=\;\right.$$

$$\left.\textstyle\sum_i^{\rm N} m_i \left[\, (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \times \mathbf{a}_i \,\right] \;=\; \sum_i^{\rm N} (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \times \mathbf{F}_i \;=\; 0 \,\right]$$

Las energías mecánicas [E_1 y E_2] de un sistema de N partículas permanecen constantes si el sistema está sujeto solamente a fuerzas conservativas.

$$\mathrm{E}_1 \;=\; \text{constante} \qquad \left[\, \Delta\, \mathrm{E}_1 \;=\; \Delta\, \mathrm{K}_1 + \Delta\, \mathrm{U}_1 \;=\; 0 \,\right]$$

$$\mathrm{E}_2 \;=\; \text{constante} \qquad \left[\, \Delta\, \mathrm{E}_2 \;=\; \Delta\, \mathrm{K}_2 + \Delta\, \mathrm{U}_2 \;=\; 0 \,\right]$$

Las energías mecánicas [E_3 y E_4] de un sistema de N partículas son siempre iguales a cero, por lo tanto, permanecen siempre constantes.

$$\mathrm{E}_3 \;=\; \text{constante} \qquad \left[\, \mathrm{E}_3 \;=\; \textstyle\sum_i^{\rm N} 1/2 \left[\, m_i\, \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r}_i - \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \,\right] \;=\; 0 \,\right]$$

$$\mathrm{E}_4 \;=\; \text{constante} \qquad \left[\, \mathrm{E}_4 \;=\; \textstyle\sum_i^{\rm N} 1/2 \left[\, m_i\, \mathbf{a}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) - \mathbf{F}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \,\right] \;=\; 0 \,\right]$$

$$\textstyle\sum_i^{\rm N} 1/2\, m_i \left[\, (\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_{cm}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \,\right] \;=\; \sum_i^{\rm N} 1/2\, m_i\, \mathbf{a}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})$$

Las energías mecánicas [E_5 y E_6] de un sistema de N partículas permanecen constantes si el sistema está sujeto solamente a fuerzas conservativas.

$$\mathrm{E}_5 \;=\; \text{constante} \qquad \left[\, \Delta\, \mathrm{E}_5 \;=\; \Delta\, \mathrm{K}_5 + \Delta\, \mathrm{U}_5 \;=\; 0 \,\right]$$

$$\mathrm{E}_6 \;=\; \text{constante} \qquad \left[\, \Delta\, \mathrm{E}_6 \;=\; \Delta\, \mathrm{K}_6 + \Delta\, \mathrm{U}_6 \;=\; 0 \,\right]$$

Observaciones Generales

Todas las ecuaciones de este trabajo pueden ser aplicadas en cualquier sistema de referencia inercial o no inercial.

Por lo tanto, la nueva reformulación de la mecánica clásica presentada en este trabajo está de acuerdo con el principio general de relatividad.

Adicionalmente, los sistemas de referencia inerciales y no inerciales no deben introducir las fuerzas ficticias en $\mathbf{F}_i$ (como la fuerza centrífuga, la fuerza de Coriolis, etc.)

En este trabajo, las magnitudes [m, $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}$, M, $\mathbf{R}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$, W_1, K_1, U_1, E_1, L_1, W_2, K_2, U_2, E_2, L_2, W_3, K_3, U_3, E_3, W_4, K_4, U_4, E_4, W_5, K_5, U_5, E_5, W_6, K_6, U_6 y E_6] son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales.

La energía mecánica E_3 de un sistema de partículas es siempre igual a cero [$E_3 = K_3 + U_3 = 0$]

Por lo tanto, la energía mecánica E_5 de un sistema de partículas es siempre igual a la energía mecánica E_1 del sistema de partículas [$E_5 = E_1$]

La energía mecánica E_4 de un sistema de partículas es siempre igual a cero [$E_4 = K_4 + U_4 = 0$]

Por lo tanto, la energía mecánica E_6 de un sistema de partículas es siempre igual a la energía mecánica E_2 del sistema de partículas [$E_6 = E_2$]

Si la energía potencial U_1 de un sistema de partículas es una función homogénea de grado k entonces la energía potencial U_3 y la energía potencial U_5 del sistema de partículas, están dadas por: [$U_3 = (\frac{k}{2})\, U_1$] y [$U_5 = (1+\frac{k}{2})\, U_1$]

Si la energía potencial U_2 de un sistema de partículas es una función homogénea de grado k entonces la energía potencial U_4 y la energía potencial U_6 del sistema de partículas, están dadas por: [$U_4 = (\frac{k}{2})\, U_2$] y [$U_6 = (1+\frac{k}{2})\, U_2$]

Si la energía potencial U_1 de un sistema de partículas es una función homogénea de grado k y si la energía cinética K_5 del sistema de partículas es igual a cero entonces se obtiene: [$K_1 = -\, K_3 = U_3 = (\frac{k}{2})\, U_1 = (\frac{k}{2+k})\, E_1$]

Si la energía potencial U_2 de un sistema de partículas es una función homogénea de grado k y si la energía cinética K_6 del sistema de partículas es igual a cero entonces se obtiene: [$K_2 = -\, K_4 = U_4 = (\frac{k}{2})\, U_2 = (\frac{k}{2+k})\, E_2$]

Si la energía potencial U_1 de un sistema de partículas es una función homogénea de grado k y si el promedio de la energía cinética $\langle K_5 \rangle$ del sistema de partículas es igual a cero entonces se obtiene: [$\langle K_1 \rangle = -\, \langle K_3 \rangle = \langle U_3 \rangle = (\frac{k}{2})\, \langle U_1 \rangle = (\frac{k}{2+k})\, \langle E_1 \rangle$]

Si la energía potencial U_2 de un sistema de partículas es una función homogénea de grado k y si el promedio de la energía cinética $\langle K_6 \rangle$ del sistema de partículas es igual a cero entonces se obtiene: [$\langle K_2 \rangle = -\, \langle K_4 \rangle = \langle U_4 \rangle = (\frac{k}{2})\, \langle U_2 \rangle = (\frac{k}{2+k})\, \langle E_2 \rangle$]

El promedio de la energía cinética $\langle K_5 \rangle$ y el promedio de la energía cinética $\langle K_6 \rangle$ de un sistema de partículas con desplazamiento acotado están relacionados con el teorema del virial.

El promedio de la energía cinética $\langle \mathrm{K}_5 \rangle$ y el promedio de la energía cinética $\langle \mathrm{K}_6 \rangle$ de un sistema de partículas con desplazamiento acotado (en $\langle \mathrm{K}_5 \rangle$ con respecto a $\vec{R}$ y en $\langle \mathrm{K}_6 \rangle$ con respecto a $\vec{R}_{cm}$) son siempre iguales a cero.

La energía cinética K_5 y la energía cinética K_6 de un sistema de N partículas pueden ser también expresadas como sigue: [$\mathrm{K}_5 = \sum_i^{\mathrm{N}} 1/2\ m_i\,(\,\dot{r}_i\,\dot{r}_i + \ddot{r}_i\,r_i\,)$] donde $r_i \doteq |\,\vec{r}_i - \vec{R}\,|$ y [$\mathrm{K}_6 = \sum_{i<j}^{\mathrm{N}} 1/2\, m_i\, m_j\, \mathrm{M}^{-1}(\,\dot{r}_{ij}\,\dot{r}_{ij} + \ddot{r}_{ij}\,r_{ij}\,)$] donde $r_{ij} \doteq |\,\vec{r}_i - \vec{r}_j\,|$ N1 $\left(\sum_{i<j}^{\mathrm{N}} \doteq \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \sum_{j>i}^{\mathrm{N}}\right)$

La energía cinética K_5 y la energía cinética K_6 de un sistema de N partículas pueden ser también expresadas como sigue: [$\mathrm{K}_5 = \sum_i^{\mathrm{N}} 1/2\ m_i\,(\,\ddot{\tau}_i\,)$] donde $\tau_i \doteq 1/2\,(\vec{r}_i - \vec{R}) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R})$ y [$\mathrm{K}_6 = \sum_{j>i}^{\mathrm{N}} 1/2\, m_i\, m_j\, \mathrm{M}^{-1}(\,\ddot{\tau}_{ij}\,)$] donde $\tau_{ij} \doteq 1/2\,(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ N2 $\left(\sum_{j>i}^{\mathrm{N}} \doteq \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \sum_{j>i}^{\mathrm{N}}\right)$

La energía cinética K_6 es la única energía cinética que puede ser expresada sin necesidad de introducir magnitud alguna relacionada con el free-system [tales como: $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}$, $\vec{\omega}$, $\vec{R}$, etc.]

En un sistema aislado de partículas la energía potencial U_2 es igual a la energía potencial U_1 si las fuerzas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma débil [$\mathrm{U}_2 = \mathrm{U}_1$]

En un sistema aislado de partículas la energía potencial U_4 es igual a la energía potencial U_3 si las fuerzas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma débil [$\mathrm{U}_4 = \mathrm{U}_3$]

En un sistema aislado de partículas la energía potencial U_6 es igual a la energía potencial U_5 si las fuerzas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma débil [$\mathrm{U}_6 = \mathrm{U}_5$]

Un sistema de referencia S es un sistema no rotante especial cuando la velocidad angular $\vec{\omega}$ del free-system con respecto a S es igual a cero y S es además un sistema inercial cuando la aceleración $\vec{A}$ del centro de masa del free-system con respecto a S es igual a cero.

Si el origen de un sistema no rotante especial [$\vec{\omega} = 0$] coincide siempre con el centro de masa del free-system [$\vec{R} = \vec{V} = \vec{A} = 0$] entonces se logra: [$\mathbf{r}_i = \vec{r}_i$, $\mathbf{v}_i = \vec{v}_i$ y $\mathbf{a}_i = \vec{a}_i$] Por lo tanto, es posible afirmar que las magnitudes inerciales y las magnitudes ordinarias son siempre las mismas en este sistema de referencia.

Este trabajo no contradice la primera y segunda ley de Newton puesto que estas dos leyes siguen siendo válidas en cualquier sistema de referencia inercial. La ecuación [$\mathbf{F}_i = m_i\,\mathbf{a}_i$] es una simple reformulación de la segunda ley de Newton.

Finalmente, en este trabajo, la ecuación [$\mathbf{F}_i = m_i\,\mathbf{a}_i$] es válida en cualquier sistema de referencia inercial o no inercial incluso si todas las fuerzas desobedecen siempre la tercera ley de Newton en su forma fuerte y en su forma débil.

Bibliografía

A. Blato, Una Reformulación de la Mecánica Clásica.

A. Blatter, Una Reformulación de la Mecánica Clásica.

A. Torassa, Una Reformulación de la Mecánica Clásica.

Anexo I

Free-System

El free-system es un sistema de N partículas que está siempre libre de fuerzas externas e internas, que es tridimensional y que las distancias relativas entre las N partículas permanecen siempre constantes.

La posición $\vec{R}$, la velocidad $\vec{V}$ y la aceleración $\vec{A}$ del centro de masa del free-system respecto a un sistema de referencia S, la velocidad angular $\vec{\omega}$ y la aceleración angular $\vec{\alpha}$ del free-system respecto al sistema de referencia S, están dadas por:

$$\mathrm{M} \doteq \textstyle\sum_i^{\mathrm{N}} m_i$$

$$\vec{R} \doteq \mathrm{M}^{-1} \textstyle\sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, \vec{r}_i$$

$$\vec{V} \doteq \mathrm{M}^{-1} \textstyle\sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, \vec{v}_i$$

$$\vec{A} \doteq \mathrm{M}^{-1} \textstyle\sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, \vec{a}_i$$

$$\vec{\omega} \doteq \overleftrightarrow{I}^{-1} \cdot \vec{L}$$

$$\vec{\alpha} \doteq d(\vec{\omega})/dt$$

$$\overleftrightarrow{I} \doteq \textstyle\sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, [\, |\, \vec{r}_i - \vec{R}\, |^2 \, \overleftrightarrow{1} - (\vec{r}_i - \vec{R}) \otimes (\vec{r}_i - \vec{R}) \,]$$

$$\vec{L} \doteq \textstyle\sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, (\vec{r}_i - \vec{R}) \times (\vec{v}_i - \vec{V})$$

donde M es la masa del free-system, $\overleftrightarrow{I}$ es el tensor de inercia del free-system (respecto a $\vec{R}$) y $\vec{L}$ es el momento angular del free-system respecto al sistema de referencia S.

Transformaciones

Las transformaciones de posición, velocidad y aceleración de una partícula i entre un sistema de referencia S y otro sistema de referencia S', están dadas por:

$$(\vec{r}_i - \vec{R}) = \mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i$$

$$(\vec{r}'_i - \vec{R}') = \mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i$$

$$(\vec{v}_i - \vec{V}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}) = \mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i$$

$$(\vec{v}'_i - \vec{V}') - \vec{\omega}' \times (\vec{r}'_i - \vec{R}') = \mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i$$

$$(\vec{a}_i - \vec{A}) - 2\, \vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}) + \vec{\omega} \times [\, \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})\,] - \vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R}) = \mathbf{a}_i = \mathbf{a}'_i$$

$$(\vec{a}'_i - \vec{A}') - 2\, \vec{\omega}' \times (\vec{v}'_i - \vec{V}') + \vec{\omega}' \times [\, \vec{\omega}' \times (\vec{r}'_i - \vec{R}')\,] - \vec{\alpha}' \times (\vec{r}'_i - \vec{R}') = \mathbf{a}'_i = \mathbf{a}_i$$

Anexo II

Relaciones

En un sistema de partículas se dan siempre estas relaciones (Las magnitudes $\mathbf{R}_{cm}$, $\mathbf{V}_{cm}$, $\mathbf{A}_{cm}$, $\vec{R}_{cm}$, $\vec{V}_{cm}$ y $\vec{A}_{cm}$ pueden ser reemplazadas por las magnitudes $\mathbf{R}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{A}$, $\vec{R}$, $\vec{V}$ y $\vec{A}$ o por las magnitudes $\mathbf{r}_j$, $\mathbf{v}_j$, $\mathbf{a}_j$, $\vec{r}_j$, $\vec{v}_j$ y $\vec{a}_j$, respectivamente. Por otro lado, siempre $\mathbf{R} = \mathbf{V} = \mathbf{A} = 0$)

$$\mathbf{r}_i = (\vec{r}_i - \vec{R})$$

$$\mathbf{R}_{cm} = (\vec{R}_{cm} - \vec{R})$$

$$\longrightarrow \quad (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) = (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})$$

$$\mathbf{v}_i = (\vec{v}_i - \vec{V}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})$$

$$\mathbf{V}_{cm} = (\vec{V}_{cm} - \vec{V}) - \vec{\omega} \times (\vec{R}_{cm} - \vec{R})$$

$$\longrightarrow \quad (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm}) = (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})$$

$$(\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm}) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm}) = \big[(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \big] \cdot \big[(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \big] =$$

$$(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) \cdot (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) - 2 (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) \cdot \big[\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \big] + \big[\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \big] \cdot \big[\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \big] =$$

$$(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) \cdot (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) + 2 (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \cdot \big[\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) \big] + \big[\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \big] \cdot \big[\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \big] =$$

$$(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) \cdot (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) + \big[2\, \vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) \big] \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) + \big[\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \big] \cdot \big[\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \big] =$$

$$(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})^2 + \big[2\, \vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) \big] \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) + \big[\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \big]^2$$

$$(\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_{cm}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) = \big\{ (\vec{a}_i - \vec{A}_{cm}) - 2\, \vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] -$$

$$\vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \big\} \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) = (\vec{a}_i - \vec{A}_{cm}) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) - \big[2\, \vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) \big] \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) +$$

$$\big\{ \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})] \big\} \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) - \big[\vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \big] \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) = (\vec{a}_i - \vec{A}_{cm}) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) -$$

$$\big[2\, \vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) \big] \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) + \big\{ \big[\vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \big] \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \big\} \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) =$$

$$(\vec{a}_i - \vec{A}_{cm}) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) - \big[2\, \vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) \big] \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) + \big[\vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \big]^2 - (\vec{\omega})^2 (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})^2$$

$$\longrightarrow \quad (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm})^2 + (\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_{cm}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) = (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})^2 + (\vec{a}_i - \vec{A}_{cm}) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})$$

Anexo III

Magnitudes

Las magnitudes $\mathbf{L}_2$, W_2, K_2, U_2, W_4, K_4, U_4, W_6, K_6 y U_6 de un sistema de N partículas pueden ser también expresadas como sigue:

$$\mathbf{L}_2 \;=\; \textstyle\sum_{j>i}^{N} m_i\, m_j\, M^{-1} \big[\, (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \,\big]$$

$$W_2 \;=\; \textstyle\sum_{j>i}^{N} m_i\, m_j\, M^{-1} \big[\, \int_1^2 (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \,\big]$$

$$\Delta\, K_2 \;=\; \textstyle\sum_{j>i}^{N} \Delta\, {}^1\!/_2\, m_i\, m_j\, M^{-1}\, (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)^2 \;=\; W_2$$

$$\Delta\, U_2 \;=\; -\textstyle\sum_{j>i}^{N} m_i\, m_j\, M^{-1} \big[\, \int_1^2 (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \,\big]$$

$$W_4 \;=\; \textstyle\sum_{j>i}^{N} \Delta\, {}^1\!/_2\, m_i\, m_j\, M^{-1} \big[\, (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \,\big]$$

$$\Delta\, K_4 \;=\; \textstyle\sum_{j>i}^{N} \Delta\, {}^1\!/_2\, m_i\, m_j\, M^{-1} \big[\, (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \,\big] \;=\; W_4$$

$$\Delta\, U_4 \;=\; -\textstyle\sum_{j>i}^{N} \Delta\, {}^1\!/_2\, m_i\, m_j\, M^{-1} \big[\, (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \,\big]$$

$$W_6 \;=\; \textstyle\sum_{j>i}^{N} m_i\, m_j\, M^{-1} \big[\, \int_1^2 (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) + \Delta\, {}^1\!/_2\, (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \,\big]$$

$$\Delta\, K_6 \;=\; \textstyle\sum_{j>i}^{N} \Delta\, {}^1\!/_2\, m_i\, m_j\, M^{-1} \big[\, (\vec{v}_i - \vec{v}_j)^2 + (\vec{a}_i - \vec{a}_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \,\big] \;=\; W_6$$

$$\Delta\, U_6 \;=\; -\textstyle\sum_{j>i}^{N} m_i\, m_j\, M^{-1} \big[\, \int_1^2 (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) + \Delta\, {}^1\!/_2\, (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \,\big]$$

Las magnitudes $W_{(1\text{ al }6)}$ y $U_{(1\text{ al }6)}$ de un sistema aislado de N partículas cuyas fuerzas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma débil se reducen a:

$$W_1 \;=\; W_2 \;=\; \textstyle\sum_{i}^{N} \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

$$\Delta\, U_1 \;=\; \Delta\, U_2 \;=\; -\textstyle\sum_{i}^{N} \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

$$W_3 \;=\; W_4 \;=\; \textstyle\sum_{i}^{N} \Delta\, {}^1\!/_2\, \mathbf{F}_i \cdot \vec{r}_i$$

$$\Delta\, U_3 \;=\; \Delta\, U_4 \;=\; -\textstyle\sum_{i}^{N} \Delta\, {}^1\!/_2\, \mathbf{F}_i \cdot \vec{r}_i$$

$$W_5 \;=\; W_6 \;=\; \textstyle\sum_{i}^{N} \big[\, \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\vec{r}_i + \Delta\, {}^1\!/_2\, \mathbf{F}_i \cdot \vec{r}_i \,\big]$$

$$\Delta\, U_5 \;=\; \Delta\, U_6 \;=\; -\textstyle\sum_{i}^{N} \big[\, \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\vec{r}_i + \Delta\, {}^1\!/_2\, \mathbf{F}_i \cdot \vec{r}_i \,\big]$$

Anexo IV

Sistemas y Fuerzas

Diagrama de fuerzas netas actuando sobre un sistema de referencia S, cuando S es un sistema no rotante y no acelerado linealmente respecto a un sistema inercial (9 puntos)

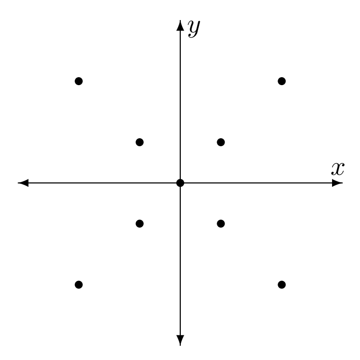


Diagrama de fuerzas netas actuando sobre un sistema de referencia S, cuando S es un sistema no rotante y acelerado linealmente respecto a un sistema inercial (9 puntos)

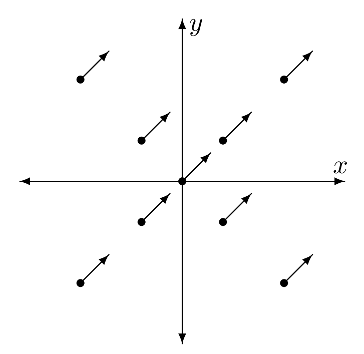
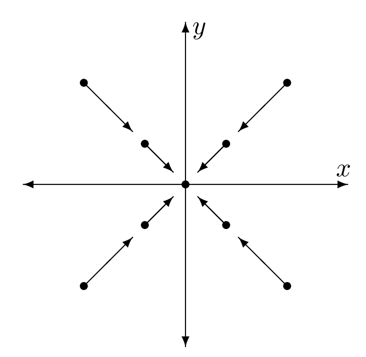


Diagrama de fuerzas netas actuando sobre un sistema de referencia S, cuando S es un sistema rotante y no acelerado linealmente respecto a un sistema inercial (9 puntos)



Una Reformulación de la Mecánica Clásica

Agustín A. Tobla

(2024) Buenos Aires, Argentina

(Trabajo IV)

En mecánica clásica, una nueva reformulación es presentada, que es invariante bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales, que puede ser aplicada en cualquier sistema de referencia sin necesidad de introducir las fuerzas ficticias y que establece la existencia de nuevas fuerzas universales de interacción, denominadas fuerzas cinéticas.

Introducción

La nueva reformulación, que este trabajo presenta en mecánica clásica, se desarrolla a partir de un sistema auxiliar de partículas (denominado free-system) que es utilizado para obtener magnitudes cinemáticas (denominadas inerciales) que son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales.

La posición inercial $\mathbf{r}_i$, la velocidad inercial $\mathbf{v}_i$ y la aceleración inercial $\mathbf{a}_i$ de una partícula i con respecto a un sistema de referencia S (inercial o no inercial) están dadas por:

$$\mathbf{r}_i \doteq (\tilde{r}_i) = (\vec{r}_i - \vec{R})$$

$$\mathbf{v}_i \doteq d(\tilde{r}_i)/dt = (\vec{v}_i - \vec{V}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})$$

$$\mathbf{a}_i \doteq d^2(\tilde{r}_i)/dt^2 = (\vec{a}_i - \vec{A}) - 2\,\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}) + \vec{\omega} \times [\,\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})\,] - \vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R})$$

donde $\tilde{r}_i$ es el vector de posición de la partícula i con respecto al sistema auxiliar [$\vec{r}_i$ es el vector de posición de la partícula i, $\vec{R}$ es el vector de posición del centro de masa del free-system y $\vec{\omega}$ es el vector de velocidad angular del free-system] [con respecto al sistema S] (ver Anexo I)

El sistema auxiliar es un sistema de referencia fijo al free-system ($\vec{\omega} = 0$) cuyo origen coincide siempre con el centro de masa del free-system ($\vec{R} = \vec{V} = \vec{A} = 0$)

Cualquier sistema de referencia S es inercial cuando la velocidad angular $\vec{\omega}$ del free-system y la aceleración $\vec{A}$ del centro de masa del free-system son iguales a cero con respecto a S.

Nota : ($\forall\ \mathbf{m} \in$ Magnitudes Inerciales : Si $\mathbf{m} = \vec{n} \longrightarrow d(\mathbf{m})/dt = d(\vec{n})/dt - \vec{\omega} \times \vec{n}$)

Nueva Dinámica

[1] Toda fuerza siempre es causada por la interacción entre dos o más partículas.

[2] La fuerza total $\mathbf{T}_i$ que actúa sobre una partícula i es siempre igual a cero [$\mathbf{T}_i = 0$]

[3] En este trabajo, todas las fuerzas dinámicas (todas las fuerzas no cinéticas) pueden obedecer o desobedecer la tercera ley de Newton en su forma débil y/o en su forma fuerte.

Fuerzas Cinéticas

La fuerza cinética $\mathbf{K}^a_{ij}$ ejercida sobre una partícula i de masa m_i por otra partícula j de masa m_j, causada por la interacción entre la partícula i y la partícula j, está dada por:

$$\mathbf{K}^a_{ij} \;=\; - \;\frac{m_i\, m_j}{M}\,(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j)$$

donde $\mathbf{a}_i$ es la aceleración inercial de la partícula i, $\mathbf{a}_j$ es la aceleración inercial de la partícula j y M $(= \sum_i^{All} m_i)$ es la masa del Universo.

La fuerza cinética $\mathbf{K}^u_i$ ejercida sobre una partícula i de masa m_i por el centro de masa del Universo, causada por la interacción entre la partícula i y el Universo, está dada por:

$$\mathbf{K}^u_i \;=\; - \; m_i\, \mathbf{A}_{cm}$$

donde $\mathbf{A}_{cm}$ $(= M^{-1} \sum_i^{All} m_i\, \mathbf{a}_i)$ es la aceleración inercial del centro de masa del Universo.

De las ecuaciones anteriores se deduce que la fuerza cinética neta $\mathbf{K}_i$ $(= \sum_j^{All} \mathbf{K}^a_{ij} + \mathbf{K}^u_i)$ que actúa sobre una partícula i de masa m_i, está dada por:

$$\mathbf{K}_i \;=\; - \; m_i\, \mathbf{a}_i$$

donde $\mathbf{a}_i$ es la aceleración inercial de la partícula i.

Si todas las fuerzas dinámicas obedecen siempre la tercera ley de Newton en su forma débil entonces la aceleración inercial del centro de masa del Universo $\mathbf{A}_{cm}$ es siempre igual a cero.

Por otro lado, la fuerza cinética $\mathbf{K}^a$ obedece siempre la tercera ley de Newton en su forma débil y/o en su forma fuerte.

[2] Principio

El [2] principio de la nueva dinámica establece que la fuerza total $\mathbf{T}_i$ que actúa sobre una partícula i es siempre igual a cero.

$$\mathbf{T}_i \;=\; 0$$

Si la fuerza total $\mathbf{T}_i$ es dividida en las siguientes dos partes: la fuerza cinética neta $\mathbf{K}_i$ y la fuerza dinámica neta $\mathbf{F}_i$ ($\sum$ de fuerzas gravitatorias, fuerzas electrostáticas, etc.) entonces:

$$\mathbf{K}_i + \mathbf{F}_i \;=\; 0$$

Ahora, sustituyendo $\mathbf{K}_i$ $(= - \, m_i\, \mathbf{a}_i)$ y reordenando, finalmente se obtiene:

$$\mathbf{F}_i \;=\; m_i\, \mathbf{a}_i$$

Esta ecuación (similar a la segunda ley de Newton) será usada a lo largo de este trabajo.

Por otro lado, en este trabajo un sistema de partículas es aislado cuando el sistema está libre de fuerzas dinámicas externas.

Ecuación de Movimiento

La fuerza dinámica neta $\mathbf{F}_i$ que actúa sobre una partícula i de masa m_i está relacionada con la aceleración inercial $\mathbf{a}_i$ de la partícula i según la siguiente ecuación:

$$\mathbf{F}_i = m_i \, \mathbf{a}_i$$

A partir de la ecuación anterior se deduce que la aceleración (ordinaria) $\vec{a}_i$ de la partícula i con respecto a un sistema de referencia S (inercial o no inercial) está dada por:

$$\vec{a}_i = \mathbf{F}_i/m_i + \vec{A} + 2\,\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}) - \vec{\omega} \times [\,\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})\,] + \vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R})$$

donde $\vec{r}_i$ es el vector de posición de la partícula i, $\vec{R}$ es el vector de posición del centro de masa del free-system y $\vec{\omega}$ es el vector de velocidad angular del free-system (ver Anexo I)

Desde la ecuación anterior se deduce que la partícula i puede estar acelerada incluso si sobre la partícula i no actúa fuerza dinámica alguna y también que la partícula i puede no estar acelerada (estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme) incluso si sobre la partícula i actúa una fuerza dinámica neta no equilibrada.

Sin embargo, desde la ecuación anterior también se deduce que la primera y segunda ley de Newton son válidas en cualquier sistema de referencia inercial, puesto que la velocidad angular $\vec{\omega}$ del free-system y la aceleración $\vec{A}$ del centro de masa del free-system son iguales a cero con respecto a cualquier sistema de referencia inercial.

En este trabajo, cualquier sistema de referencia S es un sistema de referencia inercial cuando la velocidad angular $\vec{\omega}$ del free-system y la aceleración $\vec{A}$ del centro de masa del free-system son iguales a cero con respecto a S. Por lo tanto, cualquier sistema de referencia S es un sistema de referencia no inercial cuando la velocidad angular $\vec{\omega}$ del free-system y/o la aceleración $\vec{A}$ del centro de masa del free-system no son iguales a cero con respecto a S.

Sin embargo, puesto que en mecánica clásica cualquier sistema de referencia es realmente un cuerpo rígido ideal entonces cualquier sistema de referencia S es un sistema inercial cuando la fuerza dinámica neta que actúa en cada punto del sistema S es igual a cero. Por lo tanto, cualquier sistema de referencia S es un sistema no inercial cuando la fuerza dinámica neta que actúa en cada punto del sistema S no es igual a cero (ver Anexo IV)

Por otro lado, la nueva reformulación de la mecánica clásica presentada en este trabajo y la mecánica newtoniana son observacionalmente equivalentes.

Sin embargo, los observadores no inerciales pueden utilizar la mecánica newtoniana sólo si introducen fuerzas ficticias en $\mathbf{F}_i$ (como la fuerza centrífuga, la fuerza de Coriolis, etc.)

Adicionalmente, la nueva reformulación de la mecánica clásica presentada en este trabajo es también una reformulación relacional de la mecánica clásica puesto que está desarrollada a partir de magnitudes relativas (posición, velocidad y aceleración) entre partículas.

Sin embargo, como se ha dicho más arriba, la nueva reformulación de la mecánica clásica presentada en este trabajo y la mecánica newtoniana son observacionalmente equivalentes.

Definiciones

Para un sistema de N partículas, las siguientes definiciones son aplicables:

Masa	$\mathrm{M} \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} m_i$
Posición CM 1	$\vec{R}_{cm} \doteq \mathrm{M}^{-1} \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, \vec{r}_i$
Velocidad CM 1	$\vec{V}_{cm} \doteq \mathrm{M}^{-1} \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, \vec{v}_i$
Aceleración CM 1	$\vec{A}_{cm} \doteq \mathrm{M}^{-1} \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, \vec{a}_i$
Posición CM 2	$\mathbf{R}_{cm} \doteq \mathrm{M}^{-1} \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, \mathbf{r}_i$
Velocidad CM 2	$\mathbf{V}_{cm} \doteq \mathrm{M}^{-1} \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, \mathbf{v}_i$
Aceleración CM 2	$\mathbf{A}_{cm} \doteq \mathrm{M}^{-1} \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, \mathbf{a}_i$
Momento Lineal 1	$\mathbf{P}_1 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, \mathbf{v}_i$
Momento Angular 1	$\mathbf{L}_1 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \left[\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i \right]$
Momento Angular 2	$\mathbf{L}_2 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} m_i \left[(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm}) \right]$
Trabajo 1	$\mathrm{W}_1 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \Delta\,\mathrm{K}_1$
Energía Cinética 1	$\Delta\,\mathrm{K}_1 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} \Delta\, {}^1\!/\!{}_2\, m_i \, (\mathbf{v}_i)^2$
Energía Potencial 1	$\Delta\,\mathrm{U}_1 \doteq - \sum_i^{\mathrm{N}} \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i$
Energía Mecánica 1	$\mathrm{E}_1 \doteq \mathrm{K}_1 + \mathrm{U}_1$
Lagrangiano 1	$\mathrm{L}_1 \doteq \mathrm{K}_1 - \mathrm{U}_1$
Trabajo 2	$\mathrm{W}_2 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) = \Delta\,\mathrm{K}_2$
Energía Cinética 2	$\Delta\,\mathrm{K}_2 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} \Delta\, {}^1\!/\!{}_2\, m_i \, (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm})^2$
Energía Potencial 2	$\Delta\,\mathrm{U}_2 \doteq - \sum_i^{\mathrm{N}} \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})$
Energía Mecánica 2	$\mathrm{E}_2 \doteq \mathrm{K}_2 + \mathrm{U}_2$
Lagrangiano 2	$\mathrm{L}_2 \doteq \mathrm{K}_2 - \mathrm{U}_2$

Trabajo 3 $\qquad \mathrm{W}_3 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} \Delta\, {}^1\!/_2\, \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = \Delta\,\mathrm{K}_3$

Energía Cinética 3 $\qquad \Delta\,\mathrm{K}_3 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} \Delta\, {}^1\!/_2\, m_i\, \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r}_i$

Energía Potencial 3 $\qquad \Delta\,\mathrm{U}_3 \doteq -\sum_i^{\mathrm{N}} \Delta\, {}^1\!/_2\, \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i$

Energía Mecánica 3 $\qquad \mathrm{E}_3 \doteq \mathrm{K}_3 + \mathrm{U}_3$

Trabajo 4 $\qquad \mathrm{W}_4 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} \Delta\, {}^1\!/_2\, \mathbf{F}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) = \Delta\,\mathrm{K}_4$

Energía Cinética 4 $\qquad \Delta\,\mathrm{K}_4 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} \Delta\, {}^1\!/_2\, m_i \left[(\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_{cm}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \right]$

Energía Potencial 4 $\qquad \Delta\,\mathrm{U}_4 \doteq -\sum_i^{\mathrm{N}} \Delta\, {}^1\!/_2\, \mathbf{F}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})$

Energía Mecánica 4 $\qquad \mathrm{E}_4 \doteq \mathrm{K}_4 + \mathrm{U}_4$

Trabajo 5 $\qquad \mathrm{W}_5 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} \left[\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\vec{r}_i - \vec{R}) + \Delta\, {}^1\!/_2\, \mathbf{F}_i \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}) \right] = \Delta\,\mathrm{K}_5$

Energía Cinética 5 $\qquad \Delta\,\mathrm{K}_5 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} \Delta\, {}^1\!/_2\, m_i \left[(\vec{v}_i - \vec{V})^2 + (\vec{a}_i - \vec{A}) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}) \right]$

Energía Potencial 5 $\qquad \Delta\,\mathrm{U}_5 \doteq -\sum_i^{\mathrm{N}} \left[\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\vec{r}_i - \vec{R}) + \Delta\, {}^1\!/_2\, \mathbf{F}_i \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}) \right]$

Energía Mecánica 5 $\qquad \mathrm{E}_5 \doteq \mathrm{K}_5 + \mathrm{U}_5$

Trabajo 6 $\qquad \mathrm{W}_6 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} \left[\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) + \Delta\, {}^1\!/_2\, \mathbf{F}_i \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \right] = \Delta\,\mathrm{K}_6$

Energía Cinética 6 $\qquad \Delta\,\mathrm{K}_6 \doteq \sum_i^{\mathrm{N}} \Delta\, {}^1\!/_2\, m_i \left[(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})^2 + (\vec{a}_i - \vec{A}_{cm}) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \right]$

Energía Potencial 6 $\qquad \Delta\,\mathrm{U}_6 \doteq -\sum_i^{\mathrm{N}} \left[\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d(\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) + \Delta\, {}^1\!/_2\, \mathbf{F}_i \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \right]$

Energía Mecánica 6 $\qquad \mathrm{E}_6 \doteq \mathrm{K}_6 + \mathrm{U}_6$

Relaciones

En un sistema de partículas, entre las energías cinéticas, las energías potenciales y las energías mecánicas, se dan siempre estas relaciones (ver Anexo II)

$$\mathrm{K}_1 = \mathrm{K}_2 + {}^1\!/_2\, \mathrm{M}\, \mathbf{V}_{cm}^2$$

$$\mathrm{K}_3 = \mathrm{K}_4 + {}^1\!/_2\, \mathrm{M}\, \mathbf{A}_{cm} \cdot \mathbf{R}_{cm}$$

$$\mathrm{K}_5 = \mathrm{K}_6 + {}^1\!/_2\, \mathrm{M} \left[(\vec{V}_{cm} - \vec{V})^2 + (\vec{A}_{cm} - \vec{A}) \cdot (\vec{R}_{cm} - \vec{R}) \right]$$

$$\mathrm{K}_5 = \mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_3 \quad \& \quad \mathrm{U}_5 = \mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_3 \quad \& \quad \mathrm{E}_5 = \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_3$$

$$\mathrm{K}_6 = \mathrm{K}_2 + \mathrm{K}_4 \quad \& \quad \mathrm{U}_6 = \mathrm{U}_2 + \mathrm{U}_4 \quad \& \quad \mathrm{E}_6 = \mathrm{E}_2 + \mathrm{E}_4$$

Leyes de Conservación

El momento lineal [$\mathbf{P}_1$] de un sistema aislado de N partículas permanece constante si las fuerzas dinámicas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma débil.

$$\mathbf{P}_1 \;=\; \text{constante} \qquad \Big[\, d(\mathbf{P}_1)/dt \;=\; \textstyle\sum_i^{\rm N} m_i\,\mathbf{a}_i \;=\; \textstyle\sum_i^{\rm N} \mathbf{F}_i \;=\; 0 \,\Big]$$

El momento angular [$\mathbf{L}_1$] de un sistema aislado de N partículas permanece constante si las fuerzas dinámicas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma fuerte.

$$\mathbf{L}_1 \;=\; \text{constante} \qquad \Big[\, d(\mathbf{L}_1)/dt \;=\; \textstyle\sum_i^{\rm N} m_i\,\big[\,\mathbf{r}_i \times \mathbf{a}_i\,\big] \;=\; \textstyle\sum_i^{\rm N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \;=\; 0 \,\Big]$$

El momento angular [$\mathbf{L}_2$] de un sistema aislado de N partículas permanece constante si las fuerzas dinámicas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma fuerte.

$$\mathbf{L}_2 \;=\; \text{constante} \qquad \Big[\, d(\mathbf{L}_2)/dt \;=\; \textstyle\sum_i^{\rm N} m_i\,\big[\,(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \times (\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_{cm})\,\big] \;=$$

$$\textstyle\sum_i^{\rm N} m_i\,\big[\,(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \times \mathbf{a}_i\,\big] \;=\; \textstyle\sum_i^{\rm N} (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \times \mathbf{F}_i \;=\; 0 \,\Big]$$

Las energías mecánicas [E_1 y E_2] de un sistema de N partículas permanecen constantes si el sistema está sujeto solamente a fuerzas cinéticas y a fuerzas dinámicas conservativas.

$$\mathrm{E}_1 \;=\; \text{constante} \qquad \big[\, \Delta\,\mathrm{E}_1 \;=\; \Delta\,\mathrm{K}_1 + \Delta\,\mathrm{U}_1 \;=\; 0 \,\big]$$

$$\mathrm{E}_2 \;=\; \text{constante} \qquad \big[\, \Delta\,\mathrm{E}_2 \;=\; \Delta\,\mathrm{K}_2 + \Delta\,\mathrm{U}_2 \;=\; 0 \,\big]$$

Las energías mecánicas [E_3 y E_4] de un sistema de N partículas son siempre iguales a cero, por lo tanto, permanecen siempre constantes.

$$\mathrm{E}_3 \;=\; \text{constante} \qquad \Big[\, \mathrm{E}_3 \;=\; \textstyle\sum_i^{\rm N} {}^1\!/_2\,\big[\, m_i\,\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r}_i - \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \,\big] \;=\; 0 \,\Big]$$

$$\mathrm{E}_4 \;=\; \text{constante} \qquad \Big[\, \mathrm{E}_4 \;=\; \textstyle\sum_i^{\rm N} {}^1\!/_2\,\big[\, m_i\,\mathbf{a}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) - \mathbf{F}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \,\big] \;=\; 0 \,\Big]$$

$$\textstyle\sum_i^{\rm N} {}^1\!/_2\, m_i\,\big[\,(\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_{cm}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})\,\big] \;=\; \textstyle\sum_i^{\rm N} {}^1\!/_2\, m_i\,\mathbf{a}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})$$

Las energías mecánicas [E_5 y E_6] de un sistema de N partículas permanecen constantes si el sistema está sujeto solamente a fuerzas cinéticas y a fuerzas dinámicas conservativas.

$$\mathrm{E}_5 \;=\; \text{constante} \qquad \big[\, \Delta\,\mathrm{E}_5 \;=\; \Delta\,\mathrm{K}_5 + \Delta\,\mathrm{U}_5 \;=\; 0 \,\big]$$

$$\mathrm{E}_6 \;=\; \text{constante} \qquad \big[\, \Delta\,\mathrm{E}_6 \;=\; \Delta\,\mathrm{K}_6 + \Delta\,\mathrm{U}_6 \;=\; 0 \,\big]$$

Observaciones Generales

Todas las ecuaciones de este trabajo pueden ser aplicadas en cualquier sistema de referencia inercial o no inercial.

Por lo tanto, la nueva reformulación de la mecánica clásica presentada en este trabajo está de acuerdo con el principio general de relatividad.

Adicionalmente, los sistemas de referencia inerciales y no inerciales no deben introducir las fuerzas ficticias en $\mathbf{F}_i$ (como la fuerza centrífuga, la fuerza de Coriolis, etc.)

En este trabajo, las magnitudes [$m, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{a}, \mathrm{M}, \mathbf{R}, \mathbf{V}, \mathbf{A}, \mathbf{T}, \mathbf{K}, \mathbf{F}, \mathbf{P}_1, \mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathrm{W}_1, \mathrm{K}_1, \mathrm{U}_1, \mathrm{E}_1, \mathrm{L}_1$ W_2, K_2, U_2, E_2, L_2, W_3, K_3, U_3, E_3, W_4, K_4, U_4, E_4, W_5, K_5, U_5, E_5, W_6, K_6, U_6 y E_6] son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales.

La energía mecánica E_3 de un sistema de partículas es siempre igual a cero [$\mathrm{E}_3 = \mathrm{K}_3 + \mathrm{U}_3 = 0$]

Por lo tanto, la energía mecánica E_5 de un sistema de partículas es siempre igual a la energía mecánica E_1 del sistema de partículas [$\mathrm{E}_5 = \mathrm{E}_1$]

La energía mecánica E_4 de un sistema de partículas es siempre igual a cero [$\mathrm{E}_4 = \mathrm{K}_4 + \mathrm{U}_4 = 0$]

Por lo tanto, la energía mecánica E_6 de un sistema de partículas es siempre igual a la energía mecánica E_2 del sistema de partículas [$\mathrm{E}_6 = \mathrm{E}_2$]

Si la energía potencial U_1 de un sistema de partículas es una función homogénea de grado k entonces la energía potencial U_3 y la energía potencial U_5 del sistema de partículas, están dadas por: [$\mathrm{U}_3 = (\frac{k}{2})\, \mathrm{U}_1$] y [$\mathrm{U}_5 = (1+\frac{k}{2})\, \mathrm{U}_1$]

Si la energía potencial U_2 de un sistema de partículas es una función homogénea de grado k entonces la energía potencial U_4 y la energía potencial U_6 del sistema de partículas, están dadas por: [$\mathrm{U}_4 = (\frac{k}{2})\, \mathrm{U}_2$] y [$\mathrm{U}_6 = (1+\frac{k}{2})\, \mathrm{U}_2$]

Si la energía potencial U_1 de un sistema de partículas es una función homogénea de grado k y si la energía cinética K_5 del sistema de partículas es igual a cero entonces se obtiene: [$\mathrm{K}_1 = -\,\mathrm{K}_3 = \mathrm{U}_3 = (\frac{k}{2})\, \mathrm{U}_1 = (\frac{k}{2+k})\, \mathrm{E}_1$]

Si la energía potencial U_2 de un sistema de partículas es una función homogénea de grado k y si la energía cinética K_6 del sistema de partículas es igual a cero entonces se obtiene: [$\mathrm{K}_2 = -\,\mathrm{K}_4 = \mathrm{U}_4 = (\frac{k}{2})\, \mathrm{U}_2 = (\frac{k}{2+k})\, \mathrm{E}_2$]

Si la energía potencial U_1 de un sistema de partículas es una función homogénea de grado k y si el promedio de la energía cinética $\langle \mathrm{K}_5 \rangle$ del sistema de partículas es igual a cero entonces se obtiene: [$\langle \mathrm{K}_1 \rangle = -\,\langle \mathrm{K}_3 \rangle = \langle \mathrm{U}_3 \rangle = (\frac{k}{2})\, \langle \mathrm{U}_1 \rangle = (\frac{k}{2+k})\, \langle \mathrm{E}_1 \rangle$]

Si la energía potencial U_2 de un sistema de partículas es una función homogénea de grado k y si el promedio de la energía cinética $\langle \mathrm{K}_6 \rangle$ del sistema de partículas es igual a cero entonces se obtiene: [$\langle \mathrm{K}_2 \rangle = -\,\langle \mathrm{K}_4 \rangle = \langle \mathrm{U}_4 \rangle = (\frac{k}{2})\, \langle \mathrm{U}_2 \rangle = (\frac{k}{2+k})\, \langle \mathrm{E}_2 \rangle$]

El promedio de la energía cinética $\langle \mathrm{K}_5 \rangle$ y el promedio de la energía cinética $\langle \mathrm{K}_6 \rangle$ de un sistema de partículas con desplazamiento acotado están relacionados con el teorema del virial.

El promedio de la energía cinética $\langle \mathrm{K}_5 \rangle$ y el promedio de la energía cinética $\langle \mathrm{K}_6 \rangle$ de un sistema de partículas con desplazamiento acotado (en $\langle \mathrm{K}_5 \rangle$ con respecto a $\vec{R}$ y en $\langle \mathrm{K}_6 \rangle$ con respecto a $\vec{R}_{cm}$) son siempre iguales a cero.

La energía cinética K_5 y la energía cinética K_6 de un sistema de N partículas pueden ser también expresadas como sigue: [$\mathrm{K}_5 = \sum_i^{\mathrm{N}} 1/2 \; m_i \, (\dot{r}_i \, \dot{r}_i + \ddot{r}_i \, r_i)$] donde $r_i \doteq | \vec{r}_i - \vec{R} |$ y [$\mathrm{K}_6 = \sum_{i<j}^{\mathrm{N}} 1/2 \, m_i \, m_j \, \mathrm{M}^{-1} (\dot{r}_{ij} \, \dot{r}_{ij} + \ddot{r}_{ij} \, r_{ij})$] donde $r_{ij} \doteq | \vec{r}_i - \vec{r}_j |$ N1 $\left(\sum_{i<j}^{\mathrm{N}} \doteq \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \sum_{j>i}^{\mathrm{N}} \right)$

La energía cinética K_5 y la energía cinética K_6 de un sistema de N partículas pueden ser también expresadas como sigue: [$\mathrm{K}_5 = \sum_i^{\mathrm{N}} 1/2 \; m_i \, (\ddot{\tau}_i)$] donde $\tau_i \doteq 1/2 \, (\vec{r}_i - \vec{R}) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R})$ y [$\mathrm{K}_6 = \sum_{j>i}^{\mathrm{N}} 1/2 \, m_i \, m_j \, \mathrm{M}^{-1} (\ddot{\tau}_{ij})$] donde $\tau_{ij} \doteq 1/2 \, (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ N2 $\left(\sum_{j>i}^{\mathrm{N}} \doteq \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \sum_{j>i}^{\mathrm{N}} \right)$

La energía cinética K_6 es la única energía cinética que puede ser expresada sin necesidad de introducir magnitud alguna relacionada con el free-system [tales como: $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}$, $\vec{\omega}$, $\vec{R}$, etc.]

En un sistema aislado de partículas la energía potencial U_2 es igual a la energía potencial U_1 si las fuerzas dinámicas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma débil [$\mathrm{U}_2 = \mathrm{U}_1$]

En un sistema aislado de partículas la energía potencial U_4 es igual a la energía potencial U_3 si las fuerzas dinámicas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma débil [$\mathrm{U}_4 = \mathrm{U}_3$]

En un sistema aislado de partículas la energía potencial U_6 es igual a la energía potencial U_5 si las fuerzas dinámicas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma débil [$\mathrm{U}_6 = \mathrm{U}_5$]

Un sistema de referencia S es un sistema no rotante especial cuando la velocidad angular $\vec{\omega}$ del free-system con respecto a S es igual a cero y S es además un sistema inercial cuando la aceleración $\vec{A}$ del centro de masa del free-system con respecto a S es igual a cero.

Si el origen de un sistema no rotante especial [$\vec{\omega} = 0$] coincide siempre con el centro de masa del free-system [$\vec{R} = \vec{V} = \vec{A} = 0$] entonces se logra: [$\mathbf{r}_i = \vec{r}_i$, $\mathbf{v}_i = \vec{v}_i$ y $\mathbf{a}_i = \vec{a}_i$] Por lo tanto, es posible afirmar que las magnitudes inerciales y las magnitudes ordinarias son siempre las mismas en este sistema de referencia.

Sin considerar a las fuerzas cinéticas, este trabajo no contradice la primera y segunda ley de Newton puesto que estas dos leyes siguen siendo válidas en cualquier sistema de referencia inercial. La ecuación [$\mathbf{F}_i = m_i \, \mathbf{a}_i$] es una simple reformulación de la segunda ley de Newton.

Finalmente, en este trabajo, la ecuación [$\mathbf{F}_i = m_i \, \mathbf{a}_i$] es válida en cualquier sistema de referencia inercial o no inercial incluso si todas las fuerzas dinámicas desobedecen siempre la tercera ley de Newton en su forma fuerte y en su forma débil.

Bibliografía

A. Blato, Una Reformulación de la Mecánica Clásica.

A. Blatter, Una Reformulación de la Mecánica Clásica.

A. Torassa, Una Reformulación de la Mecánica Clásica.

Anexo I

Free-System

El free-system es un sistema de N partículas que está siempre libre de fuerzas dinámicas externas e internas, que es tridimensional y que las distancias relativas entre las N partículas permanecen siempre constantes.

La posición $\vec{R}$, la velocidad $\vec{V}$ y la aceleración $\vec{A}$ del centro de masa del free-system respecto a un sistema de referencia S, la velocidad angular $\vec{\omega}$ y la aceleración angular $\vec{\alpha}$ del free-system respecto al sistema de referencia S, están dadas por:

$$\mathrm{M} \doteq \textstyle\sum_i^{\mathrm{N}} m_i$$

$$\vec{R} \doteq \mathrm{M}^{-1} \textstyle\sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, \vec{r}_i$$

$$\vec{V} \doteq \mathrm{M}^{-1} \textstyle\sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, \vec{v}_i$$

$$\vec{A} \doteq \mathrm{M}^{-1} \textstyle\sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, \vec{a}_i$$

$$\vec{\omega} \doteq \overleftrightarrow{I}^{-1} \cdot \vec{L}$$

$$\vec{\alpha} \doteq d(\vec{\omega})/dt$$

$$\overleftrightarrow{I} \doteq \textstyle\sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, [\, |\vec{r}_i - \vec{R}\,|^2 \, \overleftrightarrow{1} - (\vec{r}_i - \vec{R}) \otimes (\vec{r}_i - \vec{R})\,]$$

$$\vec{L} \doteq \textstyle\sum_i^{\mathrm{N}} m_i \, (\vec{r}_i - \vec{R}) \times (\vec{v}_i - \vec{V})$$

donde M es la masa del free-system, $\overleftrightarrow{I}$ es el tensor de inercia del free-system (respecto a $\vec{R}$) y $\vec{L}$ es el momento angular del free-system respecto al sistema de referencia S.

Transformaciones

Las transformaciones de posición, velocidad y aceleración de una partícula i entre un sistema de referencia S y otro sistema de referencia S', están dadas por:

$$(\vec{r}_i - \vec{R}) = \mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i$$

$$(\vec{r}'_i - \vec{R}') = \mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i$$

$$(\vec{v}_i - \vec{V}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}) = \mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i$$

$$(\vec{v}'_i - \vec{V}') - \vec{\omega}' \times (\vec{r}'_i - \vec{R}') = \mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i$$

$$(\vec{a}_i - \vec{A}) - 2\,\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}) + \vec{\omega} \times [\,\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})\,] - \vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R}) = \mathbf{a}_i = \mathbf{a}'_i$$

$$(\vec{a}'_i - \vec{A}') - 2\,\vec{\omega}' \times (\vec{v}'_i - \vec{V}') + \vec{\omega}' \times [\,\vec{\omega}' \times (\vec{r}'_i - \vec{R}')\,] - \vec{\alpha}' \times (\vec{r}'_i - \vec{R}') = \mathbf{a}'_i = \mathbf{a}_i$$

Anexo II

Relaciones

En un sistema de partículas se dan siempre estas relaciones (Las magnitudes $\mathbf{R}_{cm}$, $\mathbf{V}_{cm}$, $\mathbf{A}_{cm}$, $\vec{R}_{cm}$, $\vec{V}_{cm}$ y $\vec{A}_{cm}$ pueden ser reemplazadas por las magnitudes $\mathbf{R}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{A}$, $\vec{R}$, $\vec{V}$ y $\vec{A}$ o por las magnitudes $\mathbf{r}_j$, $\mathbf{v}_j$, $\mathbf{a}_j$, $\vec{r}_j$, $\vec{v}_j$ y $\vec{a}_j$, respectivamente. Por otro lado, siempre $\mathbf{R} = \mathbf{V} = \mathbf{A} = 0$)

$$\mathbf{r}_i \;=\; (\vec{r}_i - \vec{R})$$

$$\mathbf{R}_{cm} \;=\; (\vec{R}_{cm} - \vec{R})$$

$$\longrightarrow \quad (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \;=\; (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})$$

$$\mathbf{v}_i \;=\; (\vec{v}_i - \vec{V}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})$$

$$\mathbf{V}_{cm} \;=\; (\vec{V}_{cm} - \vec{V}) - \vec{\omega} \times (\vec{R}_{cm} - \vec{R})$$

$$\longrightarrow \quad (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm}) \;=\; (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})$$

$$(\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm}) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm}) \;=\; \big[\, (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \,\big] \cdot \big[\, (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \,\big] \;=$$

$$(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) \cdot (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) - 2\, (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) \cdot \big[\, \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \,\big] + \big[\, \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \,\big] \cdot \big[\, \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \,\big] \;=$$

$$(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) \cdot (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) + 2\, (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \cdot \big[\, \vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) \,\big] + \big[\, \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \,\big] \cdot \big[\, \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \,\big] \;=$$

$$(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) \cdot (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) + \big[\, 2\, \vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) \,\big] \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) + \big[\, \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \,\big] \cdot \big[\, \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \,\big] \;=$$

$$(\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})^2 + \big[\, 2\, \vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) \,\big] \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) + \big[\, \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \,\big]^2$$

$$(\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_{cm}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \;=\; \big\{\, (\vec{a}_i - \vec{A}_{cm}) - 2\, \vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) + \vec{\omega} \times [\, \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \,] -$$

$$\vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \,\big\} \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \;=\; (\vec{a}_i - \vec{A}_{cm}) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) - \big[\, 2\, \vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) \,\big] \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \;+$$

$$\big\{\, \vec{\omega} \times [\, \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \,] \,\big\} \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) - \big[\, \vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \,\big] \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \;=\; (\vec{a}_i - \vec{A}_{cm}) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \;-$$

$$\big[\, 2\, \vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) \,\big] \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) + \big\{\, \big[\, \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \,\big]\, \vec{\omega} - (\, \vec{\omega} \cdot \vec{\omega} \,)\, (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \,\big\} \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \;=$$

$$(\vec{a}_i - \vec{A}_{cm}) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) - \big[\, 2\, \vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm}) \,\big] \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) + \big[\, \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \,\big]^2 - (\, \vec{\omega} \,)^2\, (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})^2$$

$$\longrightarrow \quad (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm})^2 + (\mathbf{a}_i - \mathbf{A}_{cm}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}) \;=\; (\vec{v}_i - \vec{V}_{cm})^2 + (\vec{a}_i - \vec{A}_{cm}) \cdot (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})$$

Anexo III

Magnitudes

Las magnitudes $\mathbf{L}_2$, W_2, K_2, U_2, W_4, K_4, U_4, W_6, K_6 y U_6 de un sistema de N partículas pueden ser también expresadas como sigue:

$$\mathbf{L}_2 \;=\; \textstyle\sum_{j>i}^{\mathrm{N}} m_i\, m_j\, \mathrm{M}^{-1} \big[\, (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)\, \big]$$

$$\mathrm{W}_2 \;=\; \textstyle\sum_{j>i}^{\mathrm{N}} m_i\, m_j\, \mathrm{M}^{-1} \big[\int_1^2 (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)\, \big]$$

$$\Delta\, \mathrm{K}_2 \;=\; \textstyle\sum_{j>i}^{\mathrm{N}} \Delta\, {}^1\!/\!_2\, m_i\, m_j\, \mathrm{M}^{-1}\, (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)^2 \;=\; \mathrm{W}_2$$

$$\Delta\, \mathrm{U}_2 \;=\; -\, \textstyle\sum_{j>i}^{\mathrm{N}} m_i\, m_j\, \mathrm{M}^{-1} \big[\int_1^2 (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)\, \big]$$

$$\mathrm{W}_4 \;=\; \textstyle\sum_{j>i}^{\mathrm{N}} \Delta\, {}^1\!/\!_2\, m_i\, m_j\, \mathrm{M}^{-1} \big[\, (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)\, \big]$$

$$\Delta\, \mathrm{K}_4 \;=\; \textstyle\sum_{j>i}^{\mathrm{N}} \Delta\, {}^1\!/\!_2\, m_i\, m_j\, \mathrm{M}^{-1} \big[\, (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)\, \big] \;=\; \mathrm{W}_4$$

$$\Delta\, \mathrm{U}_4 \;=\; -\, \textstyle\sum_{j>i}^{\mathrm{N}} \Delta\, {}^1\!/\!_2\, m_i\, m_j\, \mathrm{M}^{-1} \big[\, (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)\, \big]$$

$$\mathrm{W}_6 \;=\; \textstyle\sum_{j>i}^{\mathrm{N}} m_i\, m_j\, \mathrm{M}^{-1} \big[\int_1^2 (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) + \Delta\, {}^1\!/\!_2\, (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)\, \big]$$

$$\Delta\, \mathrm{K}_6 \;=\; \textstyle\sum_{j>i}^{\mathrm{N}} \Delta\, {}^1\!/\!_2\, m_i\, m_j\, \mathrm{M}^{-1} \big[\, (\vec{v}_i - \vec{v}_j)^2 + (\vec{a}_i - \vec{a}_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)\, \big] \;=\; \mathrm{W}_6$$

$$\Delta\, \mathrm{U}_6 \;=\; -\textstyle\sum_{j>i}^{\mathrm{N}} m_i\, m_j\, \mathrm{M}^{-1} \big[\int_1^2 (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) + \Delta\, {}^1\!/\!_2\, (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)\, \big]$$

Las magnitudes $\mathrm{W}_{(1 \text{ al } 6)}$ y $\mathrm{U}_{(1 \text{ al } 6)}$ de un sistema aislado de N partículas cuyas fuerzas dinámicas internas obedecen la tercera ley de Newton en su forma débil se reducen a:

$$\mathrm{W}_1 \;=\; \mathrm{W}_2 \;=\; \textstyle\sum_i^{\mathrm{N}} \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

$$\Delta\, \mathrm{U}_1 \;=\; \Delta\, \mathrm{U}_2 \;=\; -\, \textstyle\sum_i^{\mathrm{N}} \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

$$\mathrm{W}_3 \;=\; \mathrm{W}_4 \;=\; \textstyle\sum_i^{\mathrm{N}} \Delta\, {}^1\!/\!_2\, \mathbf{F}_i \cdot \vec{r}_i$$

$$\Delta\, \mathrm{U}_3 \;=\; \Delta\, \mathrm{U}_4 \;=\; -\, \textstyle\sum_i^{\mathrm{N}} \Delta\, {}^1\!/\!_2\, \mathbf{F}_i \cdot \vec{r}_i$$

$$\mathrm{W}_5 \;=\; \mathrm{W}_6 \;=\; \textstyle\sum_i^{\mathrm{N}} \big[\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\vec{r}_i + \Delta\, {}^1\!/\!_2\, \mathbf{F}_i \cdot \vec{r}_i\, \big]$$

$$\Delta\, \mathrm{U}_5 \;=\; \Delta\, \mathrm{U}_6 \;=\; -\, \textstyle\sum_i^{\mathrm{N}} \big[\int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\vec{r}_i + \Delta\, {}^1\!/\!_2\, \mathbf{F}_i \cdot \vec{r}_i\, \big]$$

Anexo IV

Sistemas y Fuerzas

Diagrama de fuerzas dinámicas netas actuando sobre un sistema de referencia S, cuando S es un sistema no rotante y no acelerado linealmente respecto a un sistema inercial (9 puntos)

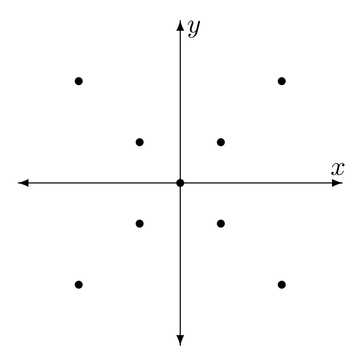


Diagrama de fuerzas dinámicas netas actuando sobre un sistema de referencia S, cuando S es un sistema no rotante y acelerado linealmente respecto a un sistema inercial (9 puntos)

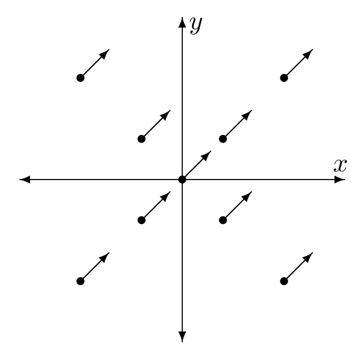
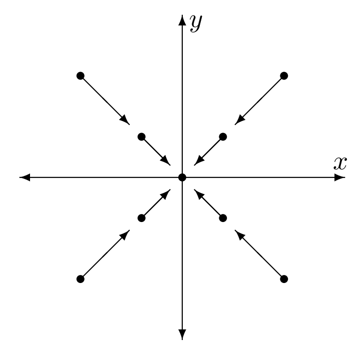


Diagrama de fuerzas dinámicas netas actuando sobre un sistema de referencia S, cuando S es un sistema rotante y no acelerado linealmente respecto a un sistema inercial (9 puntos)



Apéndice A

Campos y Potenciales I

La fuerza cinética neta $\mathbf{K}_i$ que actúa sobre una partícula i de masa m_i puede ser también expresada como sigue:

$$\mathbf{K}_i \;=\; +\, m_i \Big[\, \mathbf{E} + (\vec{v}_i - \vec{V}) \times \mathbf{B} \,\Big]$$

$$\mathbf{K}_i \;=\; +\, m_i \Big[-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\vec{v}_i - \vec{V}) \times (\nabla \times \mathbf{A}) \Big]$$

$$\mathbf{K}_i \;=\; +\, m_i \Big[-(\vec{a}_i - \vec{A}) + 2\,\vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{V}) - \vec{\omega} \times [\,\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})\,] + \vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R}) \Big]$$

donde:

$$\mathbf{E} \;=\; -\,\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} \;=\; \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\phi \;=\; -\,{}^1\!/_2\,[\,\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})\,]^2 \;+\; {}^1\!/_2\,(\vec{v}_i - \vec{V})^2$$

$$\mathbf{A} \;=\; -\,[\,\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})\,] + (\vec{v}_i - \vec{V})$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \;=\; -\,\vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{R}) + (\vec{a}_i - \vec{A})\ ^*$$

$$\nabla\phi \;=\; \vec{\omega} \times [\,\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})\,]$$

$$\nabla \times \mathbf{A} \;=\; -\,2\,\vec{\omega}$$

La fuerza cinética neta $\mathbf{K}_i$ que actúa sobre una partícula i de masa m_i puede ser también obtenida a partir de la siguiente energía cinética:

$$K_i \;=\; -\,m_i\,[\,\phi - (\vec{v}_i - \vec{V}) \cdot \mathbf{A}\,]$$

$$K_i \;=\; {}^1\!/_2\,m_i\,\big[\,(\vec{v}_i - \vec{V}) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R})\,\big]^2$$

$$K_i \;=\; {}^1\!/_2\,m_i\,\big[\,\mathbf{v}_i\,\big]^2$$

Dado que la energía cinética K_i debe ser positiva, entonces aplicando la siguiente ecuación Euler-Lagrange, se obtiene:

$$\mathbf{K}_i \;=\; -\,\frac{d}{dt}\left[\,\frac{\partial\,{}^1\!/_2\,m_i\,[\,\mathbf{v}_i\,]^2}{\partial\,\mathbf{v}_i}\,\right] + \frac{\partial\,{}^1\!/_2\,m_i\,[\,\mathbf{v}_i\,]^2}{\partial\,\mathbf{r}_i} \;=\; -\,m_i\,\mathbf{a}_i$$

donde $\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i$ y $\mathbf{a}_i$ son la posición inercial, la velocidad inercial y la aceleración inercial de la partícula i.

* En la derivada parcial temporal considerar las coordenadas espaciales como constantes [o modificar esto en la primera ecuación: $+\,{}^1\!/_2\,(\vec{v}_i - \vec{V}) \times \mathbf{B}$, y esto en la segunda ecuación: $+\,{}^1\!/_2\,(\vec{v}_i - \vec{V}) \times (\nabla \times \mathbf{A})$]

Apéndice B

Campos y Potenciales II

La fuerza cinética neta $\mathbf{K}_i$ que actúa sobre una partícula i de masa m_i (con respecto a un sistema de referencia S fijo a una partícula s ($\vec{r}_s = \vec{v}_s = \vec{a}_s = 0$) de masa m_s, con velocidad inercial $\mathbf{v}_s$ y aceleración inercial $\mathbf{a}_s$) puede ser también expresada como sigue:

$$\mathbf{K}_i \;=\; +\, m_i \Big[\, \mathbf{E} + \vec{v}_i \times \mathbf{B} \,\Big]$$

$$\mathbf{K}_i \;=\; +\, m_i \Big[-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \vec{v}_i \times (\nabla \times \mathbf{A}) \Big]$$

$$\mathbf{K}_i \;=\; +\, m_i \Big[-(\vec{a}_i + \mathbf{a}_s) + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}_i - \vec{\omega} \times (\,\vec{\omega} \times \vec{r}_i\,) + \vec{\alpha} \times \vec{r}_i \,\Big]$$

donde:

$$\mathbf{E} \;=\; -\,\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} \;=\; \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\phi \;=\; -\,{}^1\!/_2\,(\,\vec{\omega} \times \vec{r}_i\,)^2 \;+\; {}^1\!/_2\,(\vec{v}_i + \mathbf{v}_s)^2$$

$$\mathbf{A} \;=\; -\,(\,\vec{\omega} \times \vec{r}_i\,) + (\vec{v}_i + \mathbf{v}_s)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \;=\; -\,\vec{\alpha} \times \vec{r}_i \;+ (\vec{a}_i + \mathbf{a}_s)\ ^*$$

$$\nabla\phi \;=\; \vec{\omega} \times (\,\vec{\omega} \times \vec{r}_i\,)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} \;=\; -\,2\,\vec{\omega}$$

La fuerza cinética neta $\mathbf{K}_i$ que actúa sobre una partícula i de masa m_i puede ser también obtenida a partir de la siguiente energía cinética:

$$K_i \;=\; -\,m_i \left[\,\phi - (\vec{v}_i + \mathbf{v}_s) \cdot \mathbf{A}\,\right]$$

$$K_i \;=\; {}^1\!/_2\, m_i \left[\,(\vec{v}_i + \mathbf{v}_s) - (\,\vec{\omega} \times \vec{r}_i\,)\,\right]^2$$

$$K_i \;=\; {}^1\!/_2\, m_i \left[\,\mathbf{v}_i\,\right]^2$$

Dado que la energía cinética K_i debe ser positiva, entonces aplicando la siguiente ecuación Euler-Lagrange, se obtiene:

$$\mathbf{K}_i \;=\; -\,\frac{d}{dt}\left[\,\frac{\partial\, {}^1\!/_2\, m_i \left[\,\mathbf{v}_i\,\right]^2}{\partial\, \mathbf{v}_i}\,\right] + \frac{\partial\, {}^1\!/_2\, m_i \left[\,\mathbf{v}_i\,\right]^2}{\partial\, \mathbf{r}_i} \;=\; -\,m_i\,\mathbf{a}_i$$

donde $\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i$ y $\mathbf{a}_i$ son la posición inercial, la velocidad inercial y la aceleración inercial de la partícula i.

* En la derivada parcial temporal considerar las coordenadas espaciales como constantes [o modificar esto en la primera ecuación: $+\ {}^1\!/_2\ \vec{v}_i \times \mathbf{B}$, y esto en la segunda ecuación: $+\ {}^1\!/_2\ \vec{v}_i \times (\nabla \times \mathbf{A})$] $\big(\partial \mathbf{v}_s / \partial t \to \mathbf{a}_s\big)$ [o modificar en la primera ecuación: $+\ {}^1\!/_2\ (\vec{v}_i + \mathbf{v}_s) \times \mathbf{B}$, y en la segunda ecuación: $+\ {}^1\!/_2\ (\vec{v}_i + \mathbf{v}_s) \times (\nabla \times \mathbf{A})$]

Apéndice C

Campos y Potenciales III

La fuerza cinética $\mathbf{K}^a_{ij}$ ejercida sobre una partícula i de masa m_i por otra partícula j de masa m_j puede ser también expresada como sigue:

$$\mathbf{K}^a_{ij} \;=\; + \, m_i \, m_j \, M^{-1} \Big[\, \mathbf{E} + (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \times \mathbf{B} \Big]$$

$$\mathbf{K}^a_{ij} \;=\; + \, m_i \, m_j \, M^{-1} \Big[- \nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \times (\nabla \times \mathbf{A}) \Big]$$

$$\mathbf{K}^a_{ij} \;=\; + \, m_i \, m_j \, M^{-1} \Big[- (\vec{a}_i - \vec{a}_j) + 2 \, \vec{\omega} \times (\vec{v}_i - \vec{v}_j) - \vec{\omega} \times [\, \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \,] + \vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \Big]$$

donde:

$$\mathbf{E} \;=\; - \, \nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} \;=\; \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\phi \;=\; - \, {}^1\!/_2 \, [\, \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \,]^2 \; + \; {}^1\!/_2 \, (\vec{v}_i - \vec{v}_j)^2$$

$$\mathbf{A} \;=\; - \, [\, \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \,] + (\vec{v}_i - \vec{v}_j)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \;=\; - \, \vec{\alpha} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j) + (\vec{a}_i - \vec{a}_j) \; *$$

$$\nabla\phi \;=\; \vec{\omega} \times [\, \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \,]$$

$$\nabla \times \mathbf{A} \;=\; - \, 2 \, \vec{\omega}$$

La fuerza cinética $\mathbf{K}^a_{ij}$ ejercida sobre una partícula i de masa m_i por otra partícula j de masa m_j puede ser también obtenida a partir de la siguiente energía cinética:

$$K^a_{ij} \;=\; - \, m_i \, m_j \, M^{-1} \big[\, \phi - (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot \mathbf{A} \, \big]$$

$$K^a_{ij} \;=\; {}^1\!/_2 \, m_i \, m_j \, M^{-1} \big[\, (\vec{v}_i - \vec{v}_j) - \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \, \big]^2$$

$$K^a_{ij} \;=\; {}^1\!/_2 \, m_i \, m_j \, M^{-1} \big[\, \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j \, \big]^2$$

Dado que la energía cinética K^a_{ij} debe ser positiva, entonces aplicando la siguiente ecuación Euler-Lagrange, se obtiene:

$$\mathbf{K}^a_{ij} \;=\; - \, \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \, {}^1\!/_2 \, \frac{m_i \, m_j}{M} \big[\, \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j \, \big]^2}{\partial \, [\, \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j \,]} \right] + \frac{\partial \, {}^1\!/_2 \, \frac{m_i \, m_j}{M} \big[\, \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j \, \big]^2}{\partial \, [\, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \,]} \;=\; - \, \frac{m_i \, m_j}{M} \, \big[\, \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j \, \big]$$

donde $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{r}_j$, $\mathbf{v}_j$ y $\mathbf{a}_j$ son las posiciones inerciales, las velocidades inerciales y las aceleraciones inerciales de la partícula i y de la partícula j.

* En la derivada parcial temporal considerar las coordenadas espaciales como constantes [o modificar esto en la primera ecuación: $+ \, {}^1\!/_2 \, (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \times \mathbf{B}$, y esto en la segunda ecuación: $+ \, {}^1\!/_2 \, (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \times (\nabla \times \mathbf{A})$]

Apéndice D

Campos y Potenciales IV

La fuerza cinética $\mathbf{K}_i^u$ ejercida sobre una partícula i de masa m_i por el centro de masa del Universo puede ser también expresada como sigue:

$$\mathbf{K}_i^u = +\, m_i \Big[\, \mathbf{E} + (\vec{V}_{cm} - \vec{V}) \times \mathbf{B} \Big]$$

$$\mathbf{K}_i^u = +\, m_i \Big[-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\vec{V}_{cm} - \vec{V}) \times (\nabla \times \mathbf{A}) \Big]$$

$$\mathbf{K}_i^u = +\, m_i \Big[-(\vec{A}_{cm} - \vec{A}) + 2\,\vec{\omega} \times (\vec{V}_{cm} - \vec{V}) - \vec{\omega} \times [\,\vec{\omega} \times (\vec{R}_{cm} - \vec{R})\,] + \vec{\alpha} \times (\vec{R}_{cm} - \vec{R}) \Big]$$

donde:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\phi = -\,{}^1\!/_2\,[\,\vec{\omega} \times (\vec{R}_{cm} - \vec{R})\,]^2 + {}^1\!/_2\,(\vec{V}_{cm} - \vec{V})^2$$

$$\mathbf{A} = -\,[\,\vec{\omega} \times (\vec{R}_{cm} - \vec{R})\,] + (\vec{V}_{cm} - \vec{V})$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\,\vec{\alpha} \times (\vec{R}_{cm} - \vec{R}) + (\vec{A}_{cm} - \vec{A}) \; *$$

$$\nabla\phi = \vec{\omega} \times [\,\vec{\omega} \times (\vec{R}_{cm} - \vec{R})\,]$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = -\,2\,\vec{\omega}$$

La fuerza cinética $\mathbf{K}_i^u$ ejercida sobre una partícula i de masa m_i por el centro de masa del Universo puede ser también obtenida a partir de la siguiente energía cinética:

$$K_i^u = -\, m_i\,[\,\phi - (\vec{V}_{cm} - \vec{V}) \cdot \mathbf{A}\,]$$

$$K_i^u = {}^1\!/_2\, m_i\,\big[\,(\vec{V}_{cm} - \vec{V}) - \vec{\omega} \times (\vec{R}_{cm} - \vec{R})\,\big]^2$$

$$K_i^u = {}^1\!/_2\, m_i\,\big[\,\mathbf{V}_{cm}\,\big]^2$$

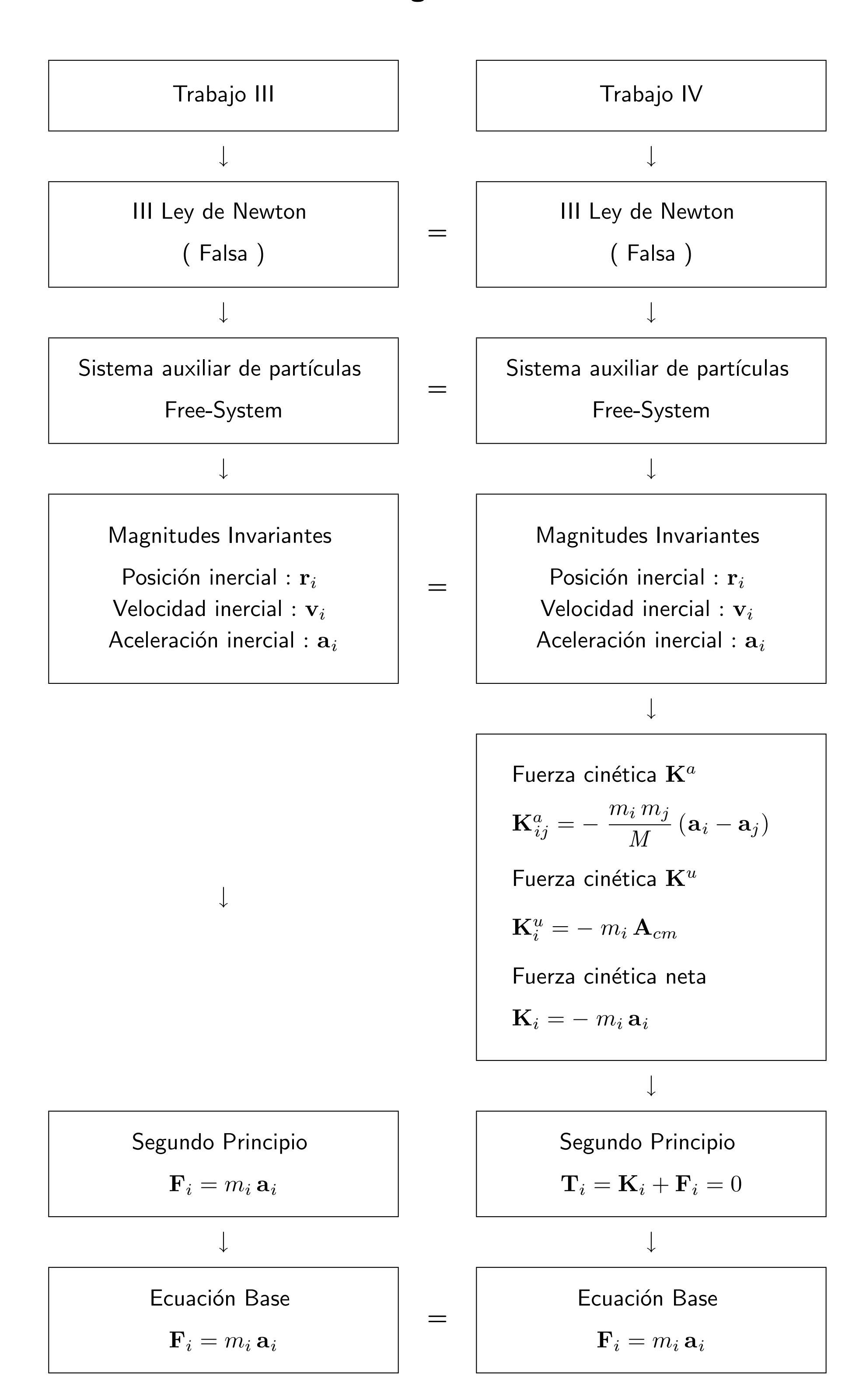
Dado que la energía cinética K_i^u debe ser positiva, entonces aplicando la siguiente ecuación Euler-Lagrange, se obtiene:

$$\mathbf{K}_i^u = -\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\, {}^1\!/_2\, m_i\,\big[\,\mathbf{V}_{cm}\,\big]^2}{\partial\,\mathbf{V}_{cm}}\right] + \frac{\partial\, {}^1\!/_2\, m_i\,\big[\,\mathbf{V}_{cm}\,\big]^2}{\partial\,\mathbf{R}_{cm}} = -\, m_i\,\mathbf{A}_{cm}$$

donde $\mathbf{R}_{cm}, \mathbf{V}_{cm}$ y $\mathbf{A}_{cm}$ son la posición inercial, la velocidad inercial y la aceleración inercial del centro de masa del Universo.

* En la derivada parcial temporal considerar las coordenadas espaciales como constantes [o modificar esto en la primera ecuación: $+\,{}^1\!/_2\,(\vec{V}_{cm} - \vec{V}) \times \mathbf{B}$, y esto en la segunda ecuación: $+\,{}^1\!/_2\,(\vec{V}_{cm} - \vec{V}) \times (\nabla \times \mathbf{A})$]

Diagrama I



Trabajo III
Trabajo IV
III Ley de Newton
(Falsa)
=
III Ley de Newton
(Falsa)
Sistema auxiliar de partículas
Free-System
=
Sistema auxiliar de partículas
Free-System
Magnitudes Invariantes
Posición inercial : $\mathbf{r}_i$
Velocidad inercial : $\mathbf{v}_i$
Aceleración inercial : $\mathbf{a}_i$
=
Magnitudes Invariantes
Posición inercial : $\mathbf{r}_i$
Velocidad inercial : $\mathbf{v}_i$
Aceleración inercial : $\mathbf{a}_i$
Fuerza cinética $\mathbf{K}^a$
$\mathbf{K}^a_{ij} = -\,\frac{m_i\,m_j}{M}\,(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j)$
Fuerza cinética $\mathbf{K}^u$
$\mathbf{K}^u_i = -\,m_i\,\mathbf{A}_{cm}$
Fuerza cinética neta
$\mathbf{K}_i = -\,m_i\,\mathbf{a}_i$
Segundo Principio
$\mathbf{F}_i = m_i\,\mathbf{a}_i$
Segundo Principio
$\mathbf{T}_i = \mathbf{K}_i + \mathbf{F}_i = 0$
Ecuación Base
$\mathbf{F}_i = m_i\,\mathbf{a}_i$
=
Ecuación Base
$\mathbf{F}_i = m_i\,\mathbf{a}_i$

Diagrama II

Trabajo III		Trabajo IV
↓		↓
Ecuación Base	=	Ecuación Base
↓		↓
Ecuación de Movimiento	=	Ecuación de Movimiento
↓		↓
Definiciones	=	Definiciones
↓		↓
Relaciones	=	Relaciones
↓		↓
Leyes de Conservación	=	Leyes de Conservación
↓		↓
Observaciones Generales	=	Observaciones Generales
↓		↓
Anexos	=	Anexos
		↓
$\nabla \cdot \mathbf{E} = 2\,\vec{\omega}^{\,2}$, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$, $\nabla \times \mathbf{B} = 0$	←	Apéndices